



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;0;0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$ có dạng $-x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c - 3d$.

Lời giải

Trả lời: -2,5

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow VTPT \vec{n}_P = \vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$.

Và (P) đi qua điểm $M \Rightarrow (P): 2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+0) + 0 \cdot (z+0) = 0$

$$\Rightarrow (P): 2x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y + 1 = 0.$$

$$\text{Vậy } b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 1 \Rightarrow b + c - 3d = -2,5.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$.

Lời giải

Trả lời: -9

Mặt phẳng vuông góc với BC có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1; -2; -5)$.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là $1(x-2) - 2(y-1) - 5(z+1) = 0$ hay $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

$$\text{Vậy } b = -2, c = -2, d = -5 \Rightarrow b + c + d = -9.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$ và 2 vectơ $\vec{a} = (1; -3; 2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 2)$. Một mặt phẳng (Q) chứa điểm A và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương có phương trình là $ax + by + cz - 3 = 0$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{b}, \vec{a}] = (4; 4; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$4(x-2)+4(y-0)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-8+4y+4z-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y+4z-12=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0$$

Suy ra $a=b=c=1$. Vậy $a+b+c=3$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;-2), B(-3;1;1), C(5;5;-5)$ có dạng $ax+by+cz+5=0$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3), \overrightarrow{AC}=(4;5;-3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=(-18;0;-24)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có một vector pháp tuyến

$$\vec{n} = -\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3;0;4) \text{ là: } 3(x-1)+4(z+2)=0 \Leftrightarrow 3x+4z+5=0.$$

Suy ra $a=3, b=0, c=4$.

Vậy $a+b+c=7$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy tính $a+d$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1); \overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0. \text{ Vậy } a+d=1+1=2$$

Câu 6: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(a): 2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (a) có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản; $a; b \in \mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Lời giải

Trả lời: 13

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (a) :

$$d(M; (a)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + (-1) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy $T=2a-b=13$.

Câu 7: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(a): x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (b) song song với mặt phẳng (a) và cách A một khoảng 1 có dạng $(a): x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Lời giải

Trả lời: 12

Mặt phẳng (b) song song với mặt phẳng (a) nên mặt phẳng (b) có dạng:
 $x - 2y + 2z + d = 0; (d \neq 2).$

Khoảng cách từ M đến (b) bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2(-1) + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |d - 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ d = 2 \end{cases} (l).$

Do đó: $(b): x - 2y + 2z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \\ d = 8 \end{cases}$

Vậy $S = 3 \cdot 2 - 2 + 8 = 12$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a; b; 1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = 2a - b$.

Lời giải

Trả lời: 2

Vì $M \in (P)$ nên $2a - b + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2; 1; -3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x - y + 2z - 1 = 0$ có dạng $x - y + az + b = 0$ Tính giá trị biểu thức $S = a - b$.

Lời giải

Trả lời: -3

Vì $(P) \parallel (Q): x - y + 2z - 1 = 0$, nên VTPT của $(Q): \vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 2)$ cũng là VTPT của (P) .

Ta có mặt phẳng (P) qua $A(2; 1; -3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 2)$

Nên phương trình mặt phẳng (P) là: $1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z + 3) = 0$ hay $x - y + 2z + 5 = 0$

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2 - 5 = -3$.

Câu 10: Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$.

Mặt phẳng qua $A(2; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng BC nhận vector $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; -5)$ là một vector pháp tuyến nên có phương trình là $-(x - 2) - 2(y + 1) - 5(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -x - 2y - 5z + 5 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ qua hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: -12

Cách 1:

$$\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1), \quad \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1).$$

(P) qua hai điểm $A(3; 2; 1), B(-3; 5; 2)$ và vuông góc mặt phẳng (Q) , nên (P) có cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1), \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1)$.

Suy ra (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(Q)}] = (2; 9; -15)$, và qua điểm $A(3; 2; 1)$.

$$\text{Phương trình } (P): 2x + 9y - 15z - 4 = 0 \Leftrightarrow 6x + 27y - 45z - 12 = 0.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = -12.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c), \quad \vec{n}_{(Q)} = (3; 1; 1).$$

Mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q)

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 27 \\ -3a + 5b + 2c = 27 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 27 \\ c = -45 \end{cases}. \text{ Vậy } S = a + b + c = -12.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0); B(0; 0; 2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1; 6; m)$ thuộc (P) , thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $C(0; y; 0) \in Oy$ với $y > 0$;

Ta có: $OA = 1, OB = 2, OC = y$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc;

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{3} y.$$

$$\text{Giả thiết } \Rightarrow \frac{1}{3} y = 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow C(0; 6; 0).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 1.$$

$$\text{Điểm } S(-1; 6; m) \text{ thuộc } (P) \Leftrightarrow \frac{-1}{1} + \frac{6}{6} + \frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $(a): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(b): 2x + 4y - mz + 2 = 0$. Tìm m để (a) và (b) song song với nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

Vec-tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_{(a)} = (1; 2; -1); \vec{n}_{(b)} = (2; 4; -m)$

Để (a) và (b) song song với nhau thì: $\vec{n}_{(a)} = k \cdot \vec{n}_{(b)} (k \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{m}{-1} \Rightarrow m = 2$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(3; 4; -2)$ và $(P): x - y + z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) , có dạng $(Q): ax + by + cz + 2 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có $\vec{AB} = (2; 2; -2) = 2(1; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\vec{AB}, \vec{n}_p] = (0; -4; -4) = -4(0; 1; 1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow -y - z + 2 = 0 \Rightarrow T = a + b + c = -2$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0), M(3; 0; 1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) , (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,73

Ta có: $\vec{AB} = (2; -3; -1); \vec{AC} = (-2; 0; -2)$.

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = (6; 6; -6).$$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 1; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y - 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$.

$$d(M, (ABC)) = \frac{|3 + 0 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2, -3, 4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vector pháp tuyến của (P) bằng 1).

Lời giải

Trả lời: 175

$$(P) // (Q): 2x - 4y + 4z + 3 = 0 \Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z + D = 0 (D \neq 3)$$

$$d(A, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|4 + 12 + 16 + D|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{|D + 32|}{6} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -14 \\ D = -50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z - 14 = 0; 2x - 4y + 4z - 50 = 0.$$

Vì hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1 nên phương trình của các mặt phẳng cần tìm là: $x - 2y + 2z - 7 = 0; x - 2y + 2z - 25 = 0$.

Khi đó tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) là $(-7) \cdot (-25) = 175$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,58

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$(m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{9}{m^2 + n^2 + p^2} = 3$$

Khi đó: $d(O; (P)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = n = p = 1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $d(A, (P)) = \frac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \frac{(3m-1)}{\sqrt{2(m^2 - m + 1)}}$.

Xét $f(m) = \frac{(3m-1)^2}{2(m^2 - m + 1)} \Rightarrow f'(m) = \frac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2 - m + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = 5 \end{cases}$.

m	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		5	$+\infty$	
$f'(m)$		-	0	+	0	-
$f(m)$	$\frac{9}{2}$			$\frac{14}{3}$		

$\frac{9}{2} \searrow \quad \nearrow \frac{14}{3} \searrow$
 $\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad$

Vậy $\max d(A, (P)) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m = 5$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2c \\ b=2 \end{cases}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là } r = \sqrt{R^2 - [d(I;(P))]^2} = \sqrt{25 - [d(I;(P))]^2}$$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I;(P))$ lớn nhất

$$\text{Ta có } d(I;(P)) = \frac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}} = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$$

$$\text{Xét } f(c) = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2 \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ c=-4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	- ¥	- 4	1	+ ¥	
y'	-	0	+	0	-
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\sqrt{5}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(I;(P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

Lời giải

Trả lời: 135

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ suy ra $I(-1;1;1)$

$$IA^2 = 27; IB^2 = 12; d(I;(P)) = 3$$

$$2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2 + 90$$

Mà $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

Suy ra $MI \geq d(I, (P)) = 3$

Vậy $2MA^2 + 3MB^2 \geq 5.9 + 90 = 135$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

Lời giải

Trả lời: 3

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm

$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA = OB = OC$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 & (1) \\ |a| = |b| = |c| & (2) \end{cases} \text{ Ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = c = -b \\ b = c = -a \end{cases}$$

- Với $a = b = c$ thay vào (1) được $a = b = c = 4$

- Với $a = b = -c$ thay vào (1) được $0 = 1$ (loại).

- Với $a = c = -b$ thay vào (1) được $a = c = -b = 2$.

- Với $b = c = -a$ thay vào (1) được $b = c = -a = 2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$$(P_1): \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1; (P_2): \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1; (P_3): \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3), B(3;4;4)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

Trả lời: 1

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (2;2;1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \quad (1).$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến mặt phẳng } (P): d(A, (P)) = \frac{|2.1 + 2 + m.3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2).$$

$$\text{Để } AB = d(A, (P)) \Rightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $A(1;2;0), B(4;1;2)$ và cách đều hai điểm $C(-2;1;-1), D(0;-3;1)$ có dạng $ax + by + cz + 1 = 0$ ($a < 0$). Tính $P = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Mp (α) cách đều hai điểm C, D khi và chỉ khi $CD \parallel (\alpha)$ hoặc (α) đi qua trung điểm I của CD .

Trường hợp 1: $(\alpha) \parallel CD$.

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{CD} = (2; -4; 2).$$

Vì mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và song song với CD nên (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (6; -2; -10)$.

Mà mp (α) qua điểm $A(1; 2; 0)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) là:
 $6(x-1) - 2(y-2) - 10z = 0 \Leftrightarrow 6x - 2y - 10z - 2 = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 5z + 1 = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $P = a + b + c = -3 + 1 + 5 = 3$.

Trường hợp 2: (α) đi qua trung điểm $I(-1; -1; 0)$ của CD .

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{AI} = (-2; -3; 0).$$

Mặt phẳng (α) qua điểm $A(1; 2; 0)$ và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (6; -4; -11)$.

$$\Rightarrow \text{phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ là: } 6(x-1) - 4(y-2) - 11z = 0 \Leftrightarrow 6x - 4y - 11z + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 3x - 2y - \frac{11}{2}z + 1 = 0 \text{ (loại vì } a > 0 \text{)}.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1; -2; -2)$, vuông góc với mặt phẳng (Oxz) đồng thời khoảng cách từ điểm $B(3; 1; -3)$ đến (P) bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x + by + cz + d = 0$ ($d \neq 0$). Tính $P = 3b + 2c - d$.

Lời giải

Trả lời: 46

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}} \cdot \overrightarrow{n_{(Oxz)}} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

(P) đi qua điểm $A(1; -2; -2) \Rightarrow (P): a(x-1) + c(z+2) = 0 \Leftrightarrow ax + cz - a + 2c = 0$.

$$d(B; (P)) = \frac{|2a - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 5(2a - c)^2 = 9(a^2 + c^2) \Leftrightarrow 11a^2 - 20ac - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ 11a = -2c \end{cases}$$

Với $a = 2c$ chọn $c = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (P): 2x + z = 0$ (loại).

Với $11a = -2c$ chọn $a = 2 \Rightarrow c = -11 \Rightarrow (P): 2x - 11z - 24 = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $P = 3b - 2c - d = 0 - 2(-11) - (-24) = 46$.

Câu 25: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$ là trực tâm của ΔABC với A, B, C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng $mx + ny + pz - 14 = 0$, ($m, n, p \in \mathbb{Q}$). Khi đó $m + n + p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a; 2; 3); \overrightarrow{BH}(1; 2-b; 3); \overrightarrow{BC}(0; -b; c); \overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Vì } H \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

$$\text{Do đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{9}{2b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Vậy $m + n + p = 6$.

Câu 26: Trong hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$, biết $b, c > 0$, phương trình mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tính $M = c + b$ biết $(ABC) \perp (P)$, $d[O; (ABC)] = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Trả lời: 1

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có:

$$(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

$$d[O; (ABC)] = \frac{|-1|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\left(\frac{1}{b}\right)^2, (b = c).$$

$$\Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{2}, \text{ do } b, c > 0 \text{ nên } b = c = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } M = c + b = 1.$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 2; 0), B(1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) là $2x - ay - bz + c = 0$. Giá trị của biểu thức $a + 2b + 3c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 24

Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) . Khi đó, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} \perp \vec{n}_p$ với $\overrightarrow{AB}(2; -1; 3)$ và $\vec{n}_p(1; -2; 3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Suy ra, chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_p] = (3; -3; -3)$. Do đó, $\vec{n}_Q(1; -1; -1)$ cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) . Mà mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ nên có phương trình là $(x+1)-(y-2)-z=0 \Leftrightarrow x-y-z+3=0 \Leftrightarrow 2x-2y-2z+6=0$.

Suy ra $a=2, b=2, c=6$ nên $a+2b+3c=24$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+by+cz+d=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+2y+3z+4=0$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+3y+z-7=0$, $(Q): x-y+z+1=0$. Khi đó d bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có VTPT của $(\beta), (P), (Q)$ lần lượt là $\vec{n}_1(1; 2; 3), \vec{n}_2(1; 3; 1), \vec{n}_3(1; -1; 1)$.

Khi đó $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_1, [\vec{n}_2, \vec{n}_3]] = (-8; 16; -8) = -8(1; -2; 1)$.

Gọi $A(x; y; z) \in d$ là giao tuyến của (P) và (Q) , khi đó tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+3y+z-7=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}. \text{ Cho } x=0 \text{ ta có } \begin{cases} 3y+z-7=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}, \text{ khi đó } A(0; 2; 1)$$

Do (α) chứa giao tuyến của (P) và (Q) nên (α) đi qua $A(0; 2; 1)$.

Phương trình $(\alpha): x-2(y-2)+z-1=0 \Leftrightarrow x-2y+z+3=0$. Vậy $d=3$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$, $B(6; -3; 0)$ và mặt phẳng (P) sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm trên đoạn thẳng AB . Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 7

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên mặt phẳng (P)

Suy ra $BK = d(B; (P)), AH = d(A; (P))$

Do $AH \perp (P); BK \perp (P)$ nên $AH \parallel BK$

Suy ra A, H, K, B đồng phẳng.

Ta có $DIKB \sim DIHA$ (góc – góc)

$$\text{Suy ra } \frac{BI}{AI} = \frac{BK}{AH} = \frac{d(B; (P))}{d(A; (P))} = 2$$

$$\Rightarrow BI = 2AI$$

Mà I thuộc đoạn AB nên $\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI}$

Ta có $\overrightarrow{BI}(a-6; b+3; c)$, $\overrightarrow{AI}(a-2; b-3; c-4)$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x + Ay + Bz + C = 0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tính tổng $A + B + C$.

$$(P): -x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow A = 2; B = C = 0 \Rightarrow A + B + C = 2$$
[illegible]

Goi B' là điểm đối xứng của B qua $(Oxy) \Rightarrow B'(-2;1;3)$

Ta có: $|AM - BN| = |AM - B'N| = |KN - B'N| \leq KB' \quad (1)$

Mà $KB' = \sqrt{B'H^2 + HK^2} \leq \sqrt{B'H^2 + (HA + AK)^2} \quad (2)$

Ta có: $B'H = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1,$

$HA = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5,$

$AK = MN = 1$ (vì $AMNK$ là hình bình hành)

Theo (1) và (2) ta có: $|AM - BN| \leq KB' \leq \sqrt{1^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} \approx 6,08.$

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ là $\sqrt{37} \approx 6,08.$